

The background features a stack of several books on the right side, with various colored spines (red, blue, green, brown). On the left side, there is a stylized graphic of a circuit board or neural network, consisting of vertical lines and small circles connected by horizontal and diagonal lines, all in a light blue color. The main title is centered in a large, bold, black font.

# ДИНАМИКА

МАРКО МИЛОШЕВИЋ

- **Динамика** је област механике која се, осим описивањем начина кретања тела, бави и узроцима одређених начина кретања.

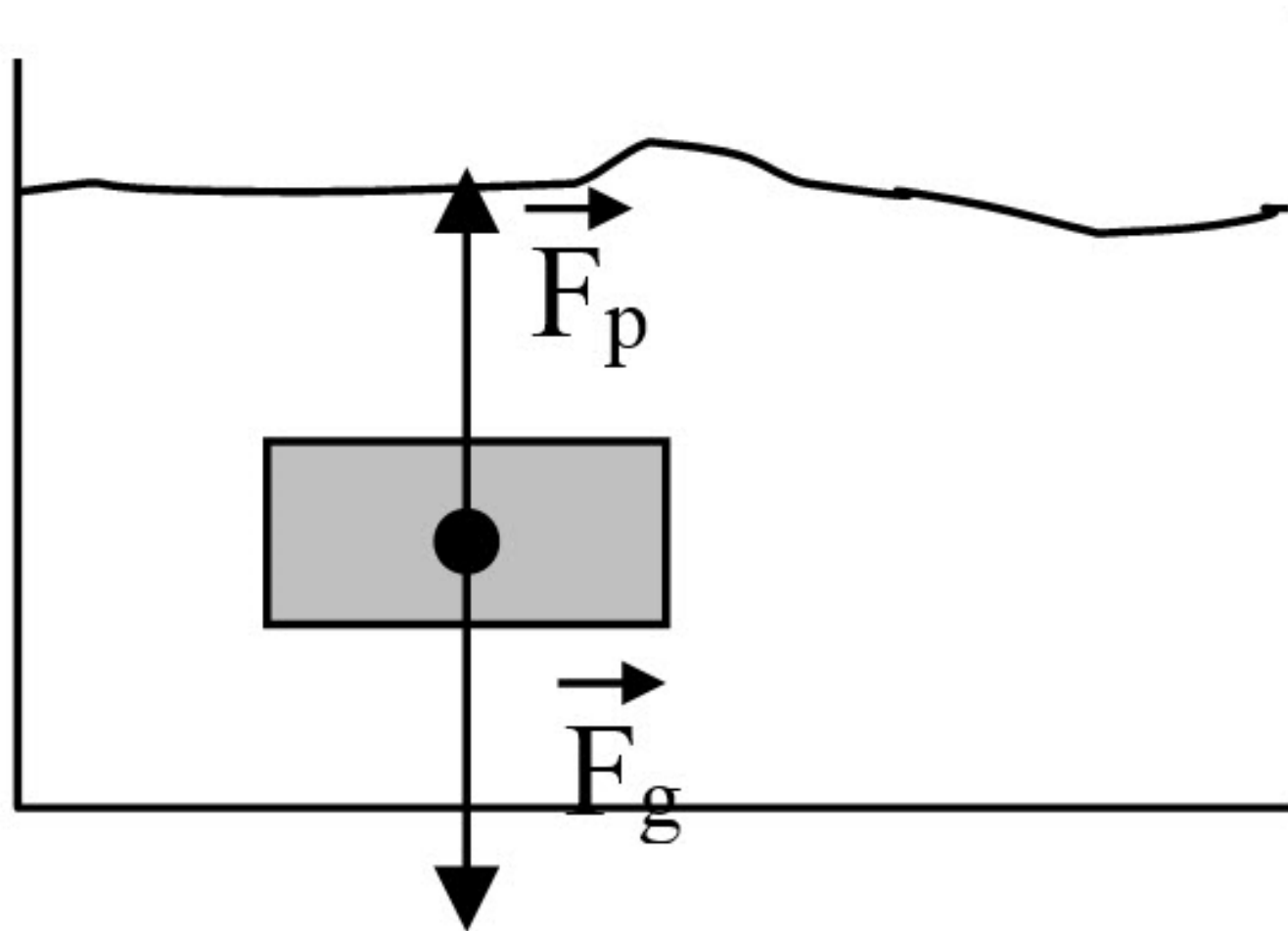
# ДИНАМИКА ТРАНСЛАТОРНОГ КРЕТАЊА

## ➤ Узајамно деловање тела – Сила

- Сила је мера узајамног деловања тела.
- Означава се великим словом латинице  $F$ .
- Јединица за мерење силе је Њутн, означава се великим словом латинице  $N$ .

- Сила је векторска величина – одређена је бројном вредношћу (интензитетом), правцем и смером.

- Нападна тачка је место на телу у коме делује сила.



## ✓ Примери сила у природи

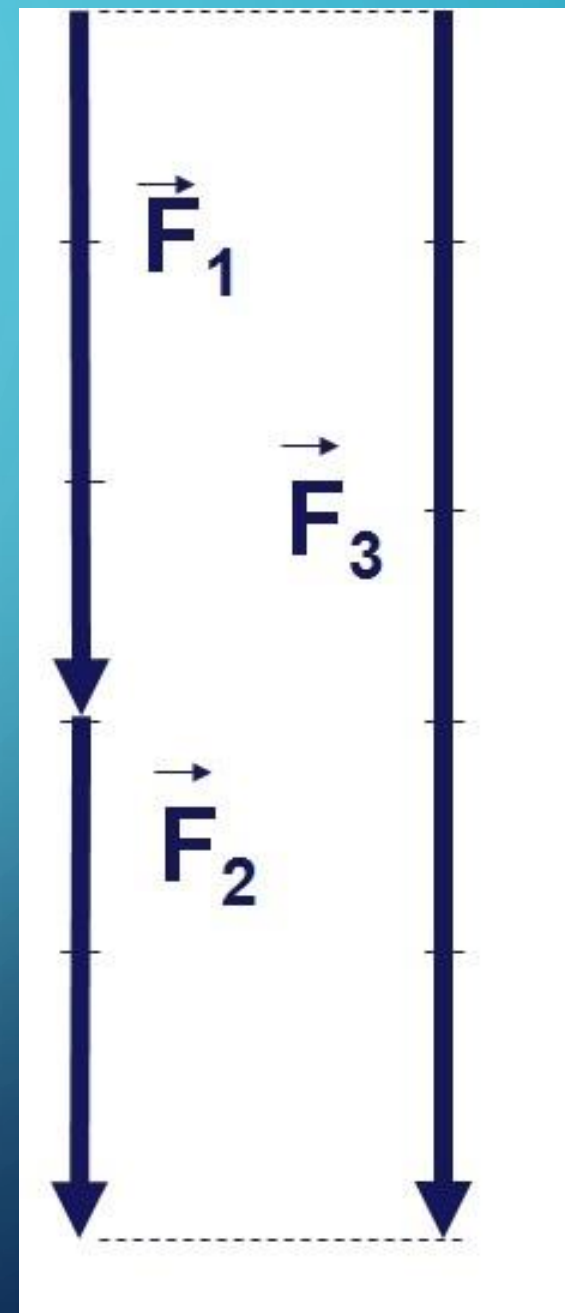
- Сила Земљине теже
- Сила потиска
- Еластична сила
- Сила затезања
- Електрична сила
- Магнетна сила

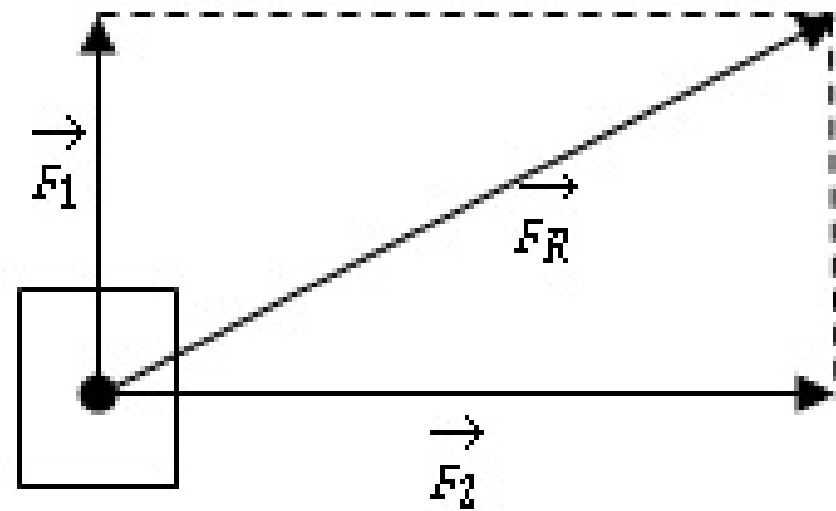
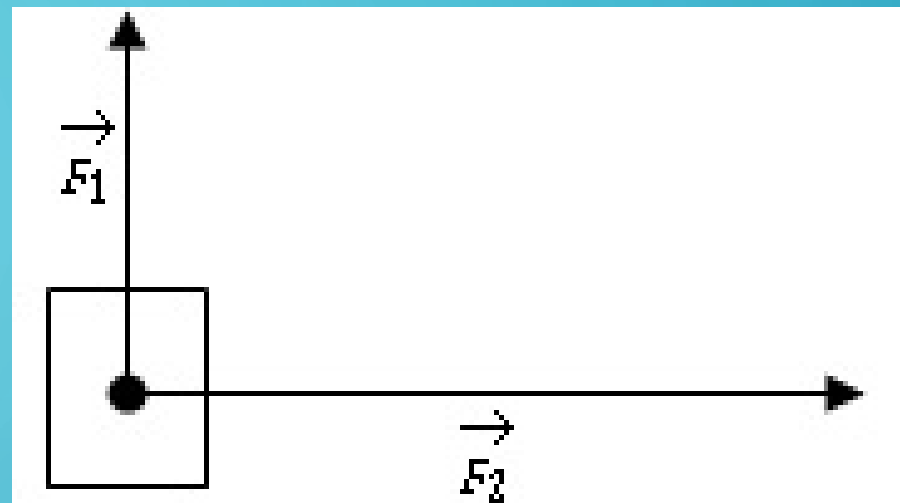
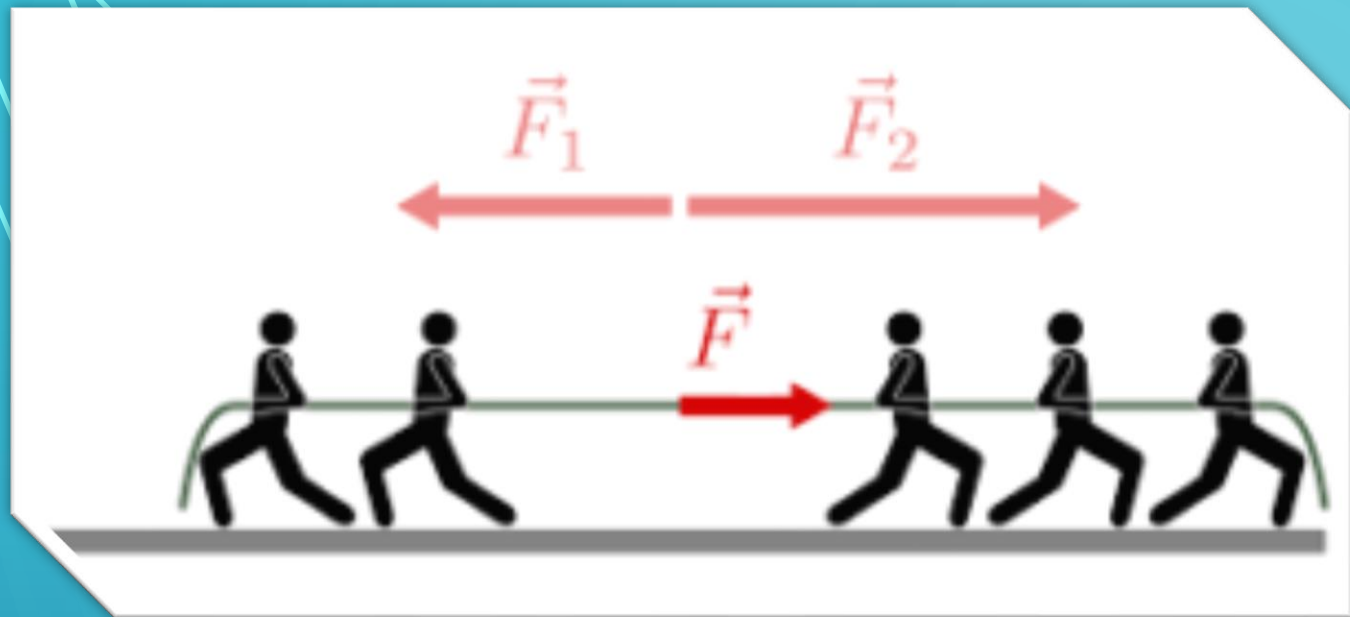
## ✓ Принцип независности дејства сила

- Принцип независности дејства сила каже да деловање једне силе не утиче на деловање других сила.
- Када на једно дело истовремено делује више сила, деловање свих тих сила може да се замени деловањем само једне силе која се назив резултујућа сила (резултанта), при чему се укупно дејство више сила израчунава као векторски збир појединачних сила.
- Поступак одређивања резултанте посматраних сила назива се **слагање сила**.

## ✓ Слагање сила

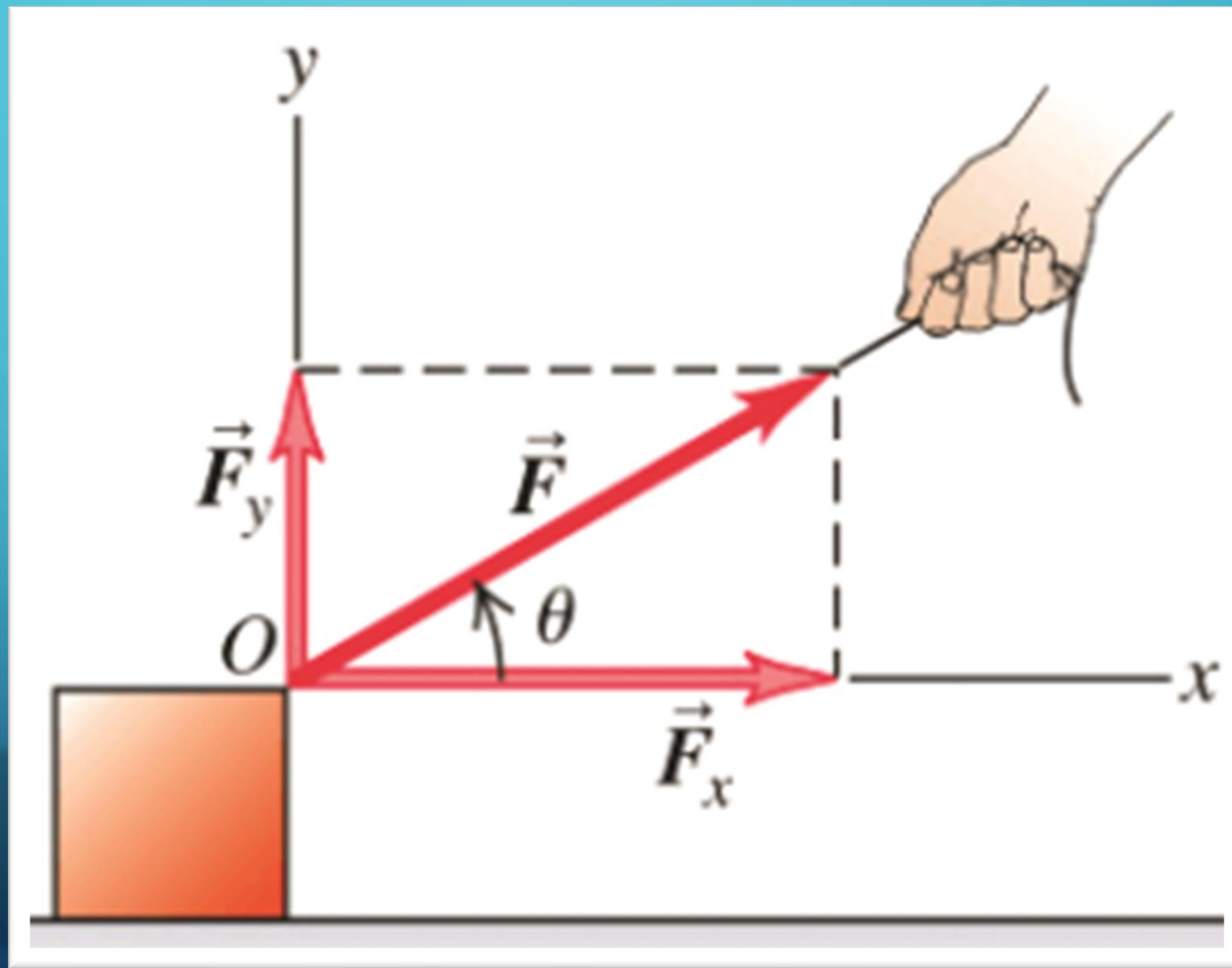
- Слагање сила је поступак у коме се две или више сила сабирају у једну, резултујућу силу. Њихов збир се израчунава помоћу векторске једначине и зависи од угла који заклапају силе. За графичко представљање користе се правила паралелограма и полигона.
- Колинеарне силе су оне силе чији су правци исти, а смерови исти или различити.







✓ Разлагање сила



## ➤ Маса и импулс

- **Маса тела** је мера инертности тела.
- Ознака за масу је мало слово  $m$ .
- Јединица за мерење масе у SI систему је килограм – kg.
- Маса је адитивна величина – маса неког тела једнака је збиру маса свих његових делова.

- Импулс (количина кретања) је физичка величина која је једнака производу брзине и масе тела.
- Импулс се обележава малим словом  $p$ .

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

- Правац и смер вектора импулса се поклапа са правцем и смером вектора брзине тела, а интензитет је једнак производу интензитета брзине и масе.

$$[p] = [m] [v] = \frac{kgm}{s}$$

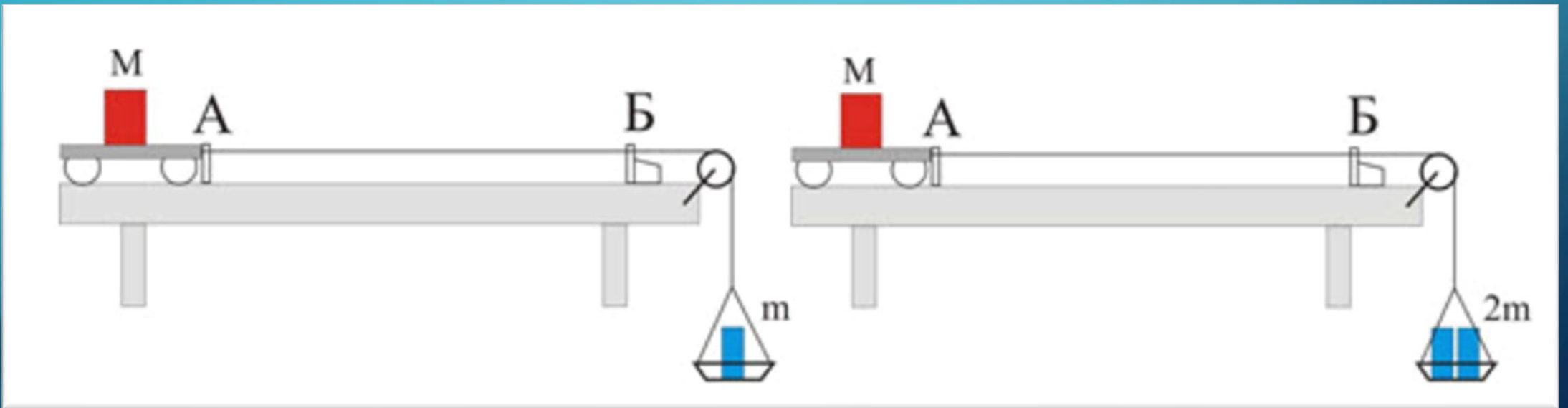
## ➤ Њутнови закони механике

### ✓ Први Њутнов закон (закон инерције)

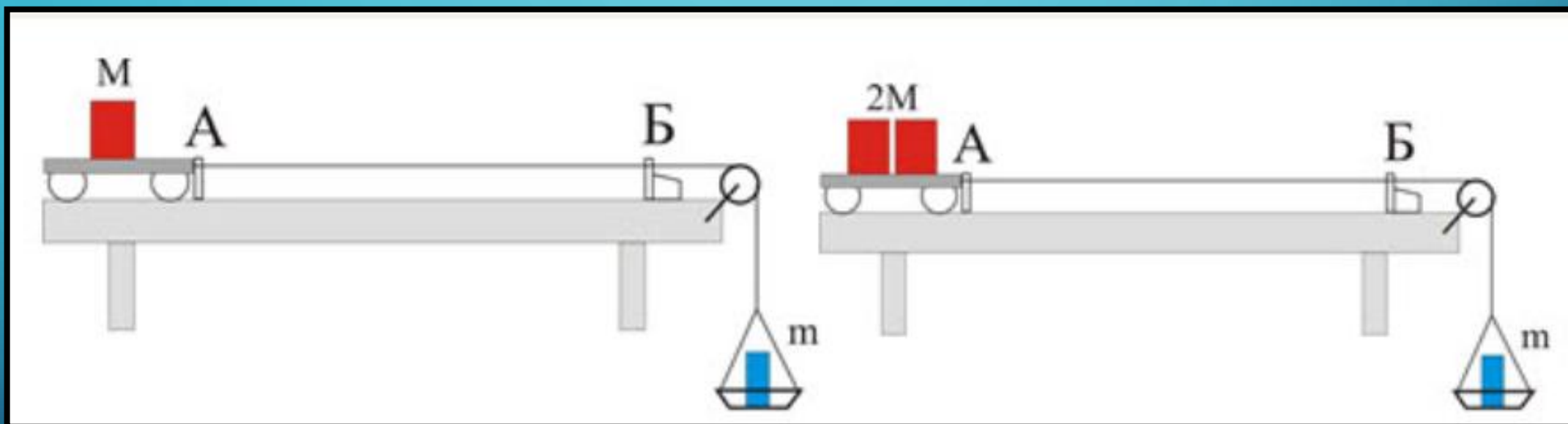
- Свако тело задржава стање мировања или равномерног праволинијског кретања све док га нека сила не принуди да промени то стање.
- На основу Првог Њутновог закона (закона инерције) следи да свака промена брзине тела, односно појава убрзања може настати само као последица деловања неке силе.

## ✓ Други Њутнов закон

- Јача сила изазива већу промену брзине – колица под дејством јаче силе добијају веће убрзање.



- Тело веће масе под дејством исте силе добија мање убрзање.



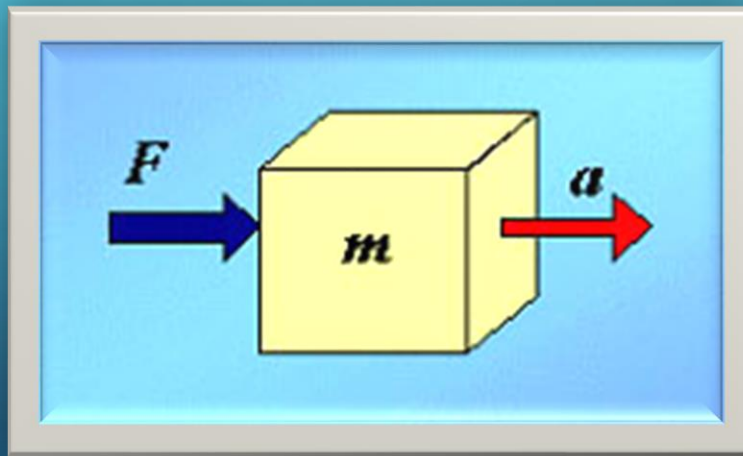
- Убрзање које при кретању добија тело сразмерно је јачини силе која на њега делује, а обрнуто сразмерно маси тог тела.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

- Други Њутнов закон назива се и основни закон динамике.

- Други Њутнов закон може да се формулише и на следећи начин: промена импулса тела у јединици времена бројно је једнака сили која на то тело делује.


$$\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \vec{F}$$






## ✓ Трећи Њутнов закон (закон акције и реакције)

- Деловање једног тела на друго увек изазива и деловање другог тела на прво.
  - Сила којом прво тело делује на друго је сила акције.
  - Сила којом друго тело делује на прво је сила реакције.
- При деловању једне силе (силе акције) јавља и друга сила (сила реакције) која има исти правац и интензитет, а супротан смер.



■ Силе, којима тела узајамно делују, имају исте интензитета, исте правце, а супротне смерове.

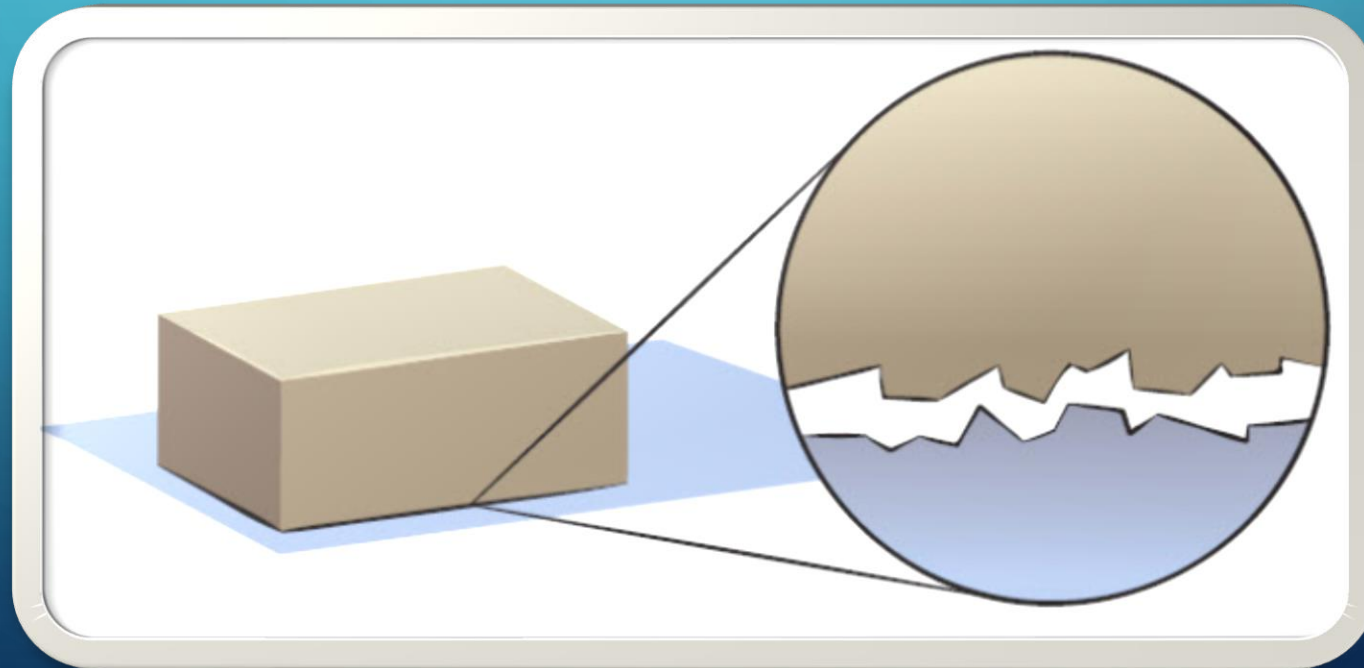
■ Особине сила акције и реакције:

- делују у пару
  - истовремене (док траје једна траје и друга)
  - истих интензитета
  - делују дуж истог правца
  - супратног су смера
  - делују на различита тела
- 



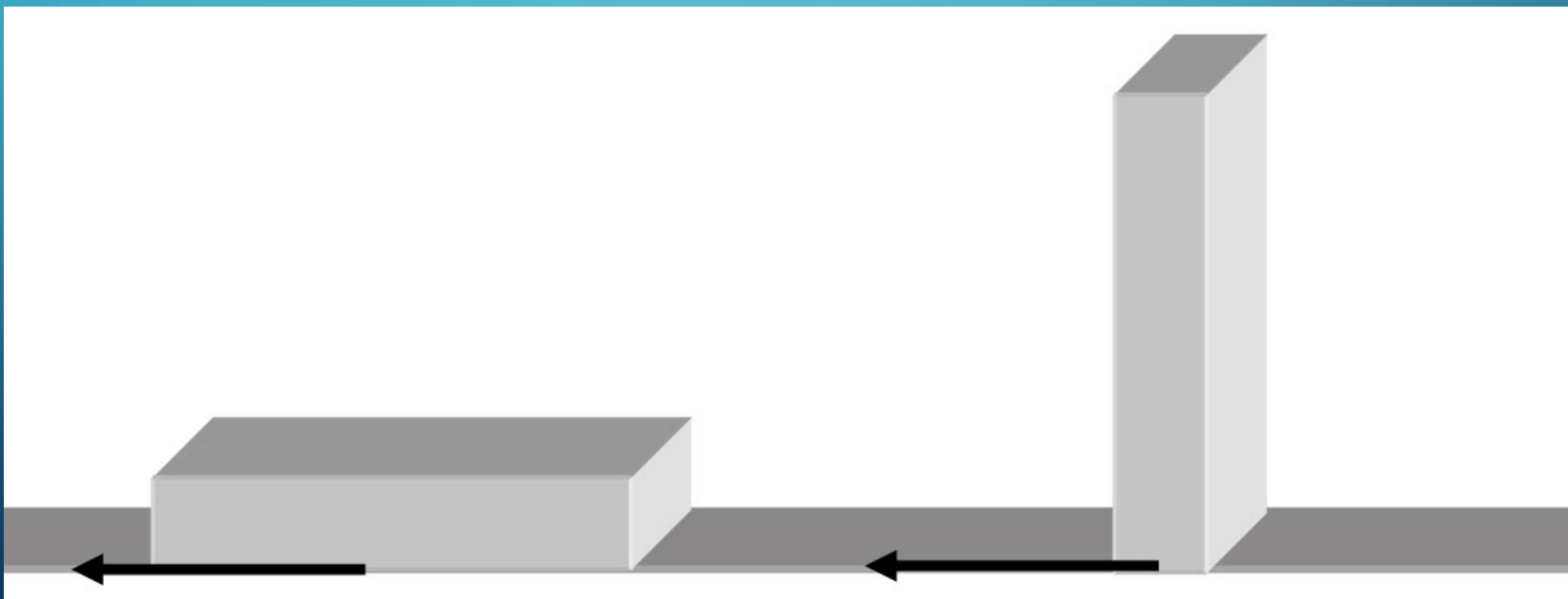
## ➤ Трење

- Трење се јавља на додирним површинама између тела. Супротставља се померању и кретању тела по површини другог тела (успорава односно зауставља тело).
- Сила трења увек делује у супротном смеру од смера кретања тела.



- Сила трења зависи:
  - од величине силе којом тело делује нормално на подлогу
  - од особина тела чије се површине додирују

- Сила трења **не** зависи од величине додирне површине.



- Сила трења клизања сразмерна је сили која делује нормално на подлогу.

$$F_{tr} = \mu N$$

$\mu$  - коефицијент трења

- Када се тело креће по хоризонталној подлози нормална сила је једнака тежини тела.

■ Трење може бити:

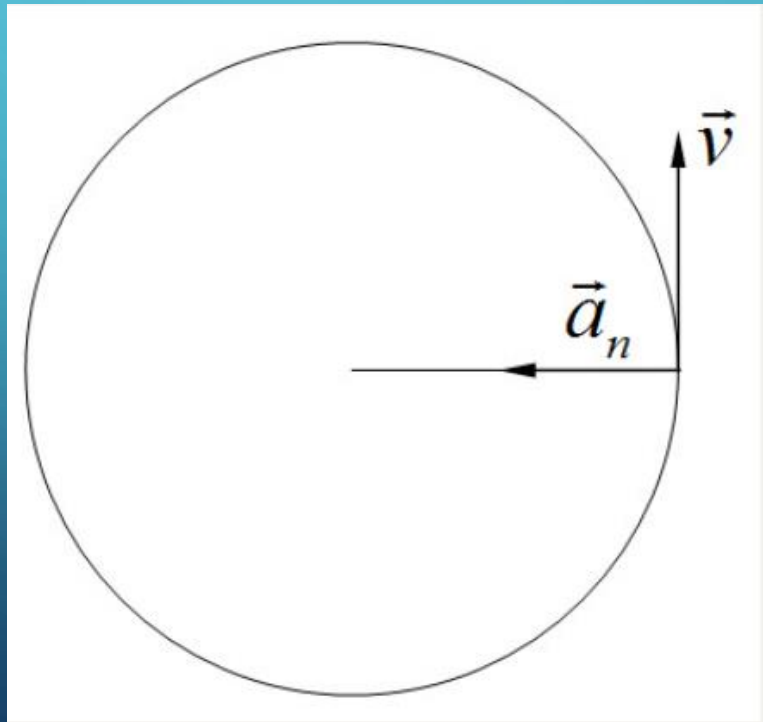
- трење мировања
- трење клизања – једно тело клизи по другом
- трење котрљања – тело се котрља по површини другог тела

коефицијент трења клизања  $>$  коефицијент трења котрљања

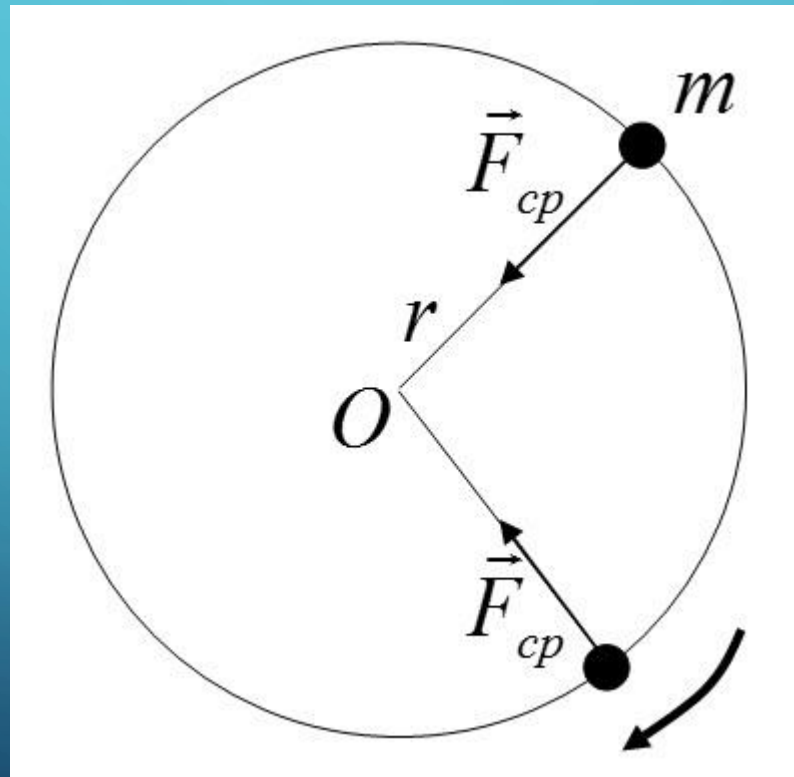
сила трења клизања  $>$  сила трења котрљања

## ➤ Центрипетална сила

- Када се тело масе  $m$  креће равномерно по кружној путањи полупречника  $r$ , тада постоји само нормално (центрипетално) убрзање. Правац овог убрзања се поклапа са правцем полупречника, а смер је ка центру кружне путање.



- Пошто постоји убрзање, мора да постоји и сила која је узрок тог убрзања. Ова сила има исти правац и смер као и нормално убрзање. Пошто је усмерена ка центру ротације назива се центрипетална сила.





$$a_n = a_{cp} = \frac{v^2}{r}$$

$$F_{cp} = \frac{mv^2}{r}$$

$$v = r\omega$$

$$F_{cp} = mr\omega^2$$

- Центрипетална сила није никаква посебна врста силе већ само назив за било коју силу чије деловање доводи до кружног кретања тела око неког центра.

## ➤ Инерцијални и неинерцијални референтни системи

- Инерцијални референтни системи - референтни системи који мирују или се крећу равномерно праволинијски и у њима важи закон инерције.
- Неинерцијални референтни системи - референтни системи који се крећу убрзано и у њима **не** важи закон инерције.
- У неинерцијалним референтним системима уводи се сила инерције како би се задовољио Други Њутнов закон.
- Инерцијалне силе јављају се у неинерцијалним референтним системима као последица убрзаног кретања референтног система.

- Инерцијална сила која делује на тело масе  $m$  посматрано из неинерцијалног система референце који транслаторно убрзава са убрзањем  $a_0$  једнака је производу масе тела и тог убрзања, а усмерена супротно од убрзања неинерцијалног референтног система.

$$\vec{F}_i = -m\vec{a}_0$$

- Инерцијалне силе не потичу од узајамног деловања између тела, па за инерцијалне силе **не** важи закон акције и реакције.

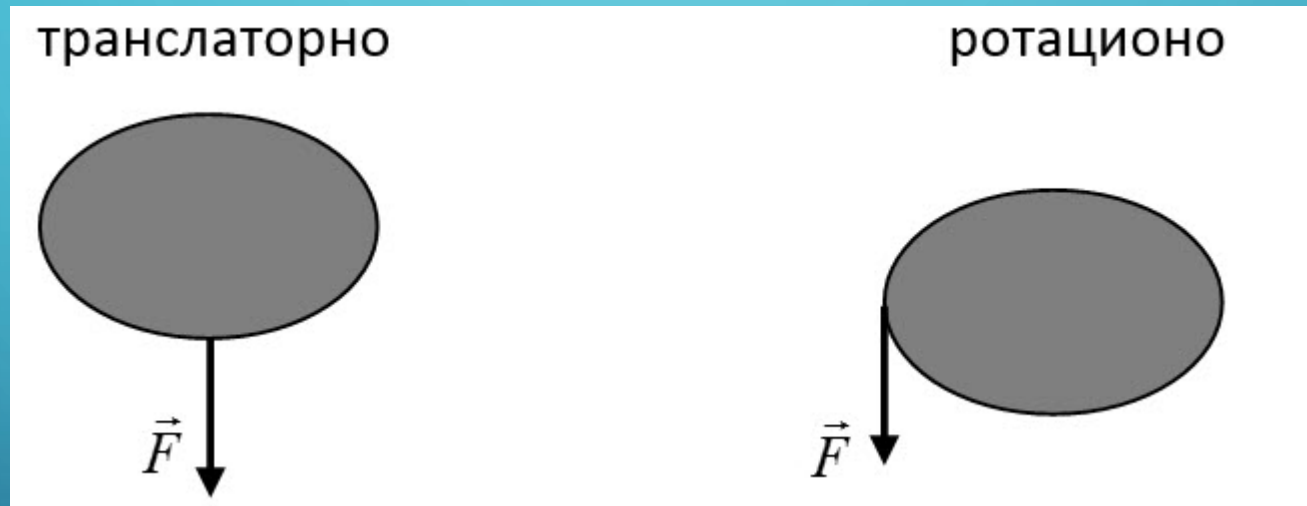
- Центрифугална сила је инерцијална сила и јавља се у неинерцијалним референтним системима референце који ротирају и интензитет јој је једнак производу масе тела, квадрата угаоне брзине и растојања тела од осе ротације, а усмерена је од центра ротације.

$$F_{cf} = \frac{mv^2}{r} = mr\omega^2$$

- Центрипетална и центрифугална сила су две различите силе у два различита референтна система па се никада не цртају на истој слици (центрипетална сила – инерцијални референтни систем, центрифугална – неинерцијални референтни систем).

# ДИНАМИКА РОТАЦИОНОГ КРЕТАЊА КРУТОГ ТЕЛА

- Нападна тачка је место на телу у коме делује сила. Од положаја нападне тачке зависи како ће се тело кретати.



- Круто тело – тело које има сталан облик и запремину (приликом кретања не мења ни облик ни запремину).

## ➤ Момент силе

- Пример врата
- Врата врше ротационо кретање око осе ротације која пролази кроз линију шарки.
- Врата ће добити веће угаоно убрзање ако је сила која на њих делује јача.
- Уколико, у два посебна случаја, истом силом делујемо на различитим растојањима од осе ротације тада ће сила која делује на већој удаљености изазвати и веће угаоно убрзање. Једна иста сила може различито да мења обртање неког тела.

- Угаоно убрзање које тело добија при ротационом кретању, не зависи само од интензитета силе која на њега делује, већ и од њеног правца и од положаја нападне тачке.

- Физичка величина која обухвата све ове елементе назива се момент силе. Момент силе се означава великим словом латинице  $M$ .

- Момент силе је једнак производу силе и крака силе:

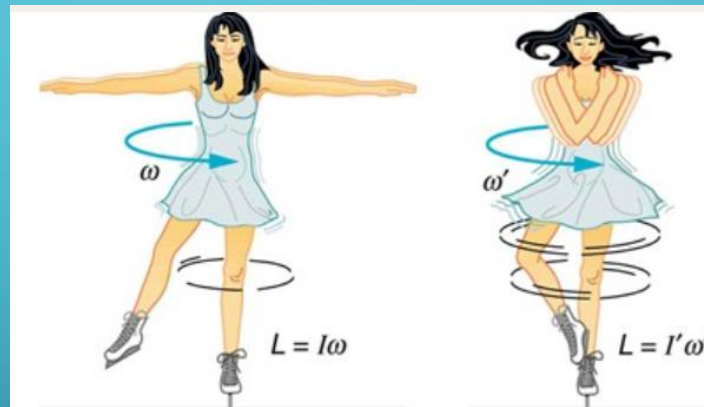
$$M = F \cdot d$$

- $d$  – крак силе који представља нормално односно најкраће растојање од осе ротације до правца деловања силе.

- Јединица момента силе:  $N \cdot m$

## ➤ Момент инерције

- Ако имамо два идентична диска (направљена од различитих материјала) теже ће се заротирати диск веће масе када се на њих делује истом тангенцијалном силом на ободи, тј. диск који има већу масу имаће мање угаоно убрзање.

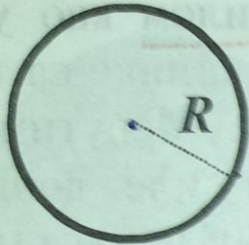
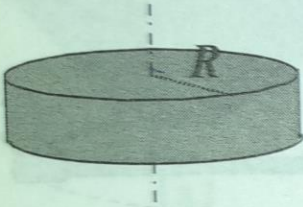
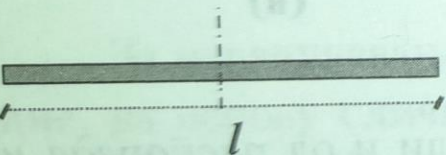
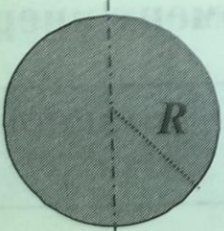


- Пример клизачице на леду: није довољно знати само масу тела да би се одредила инертност тела при ротацији, јер инертност код ротационог кретања зависи и од облика тела односно од тога како је распоређена маса унутар тела.



- Да би се описала инертност тела при ротационом кретању уводи се физичка величина која се назива момент инерције.
- Мерна јединица за момент инерције је  $kgm^2$ .
- Момент инерције је скаларна физичка величина.
- Укупан момент инерције тела може да се израчуна сабирањем момената инерције свих делића у односу на изабрану осу ротације.

Табела. Моменти инерције неких правилних геометријских тела

	момент инерције танког обруча масе $m$ и полупречника $R$ у односу на осу која је нормална на раван диска и пролази кроз његов центар $I = mR^2$
	момент инерције хомогеног диска (ваљка) масе $m$ и полупречника $R$ у односу на осу која је нормална на раван диска и пролази кроз његов центар $I = \frac{1}{2}mR^2$
	момент инерције хомогеног штапа масе $m$ и дужине $l$ у односу на осу која је нормална на штап и пролази кроз његов центар $I = \frac{1}{12}ml^2$
	момент инерције хомогене кугле масе $m$ и полупречника $R$ у односу на осу која пролази кроз њен центар $I = \frac{2}{5}mR^2$

## ➤ Момент импулса

- Момент импулса се обележава словом  $L$ .

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

- Момент импулса је векторска величина, при чему је интензитет једнак производу интензитета угаоне брзине и момента инерције, а правац и смер су исти као правац и смер вектора угаоне брзине.
- Мерна јединица за момент импулс:

$$[L] = \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}}$$

## ➤ Основни закон динамике ротације

$$M = I\alpha$$

- Производ момента инерције тела и угаоног убрзања које тело добија при дејству спољашње силе једнак је моменту силе која делује на тело.

$$\alpha = \frac{M}{I}$$

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{M}}{I}$$

- Вектор угаоног убрзања има исти правац и смер као и вектор момента силе, а интензитет је једнак количнику интензитета момента силе и момента инерције.

$$M = \frac{\Delta L}{\Delta t}$$

- Промена момента импулса у јединици времена једнака је моменту силе која делује на тело.

Транслаторно кретање

померај

брзина  $[\vec{v}]$

убрзање  $[\vec{a}]$

маса  $[m]$

импулс  $[\vec{p}]$

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

сила  $[\vec{F}]$

основни закон динамике

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$$

Ротационо кретање

угаони померај

угаона брзина  $[\vec{\omega}]$

угаоно убрзање  $[\vec{\alpha}]$

момент инерције  $[I]$

момент импулса  $[\vec{L}]$

$$\vec{L} = I \vec{\omega}$$

момент силе  $[\vec{M}]$

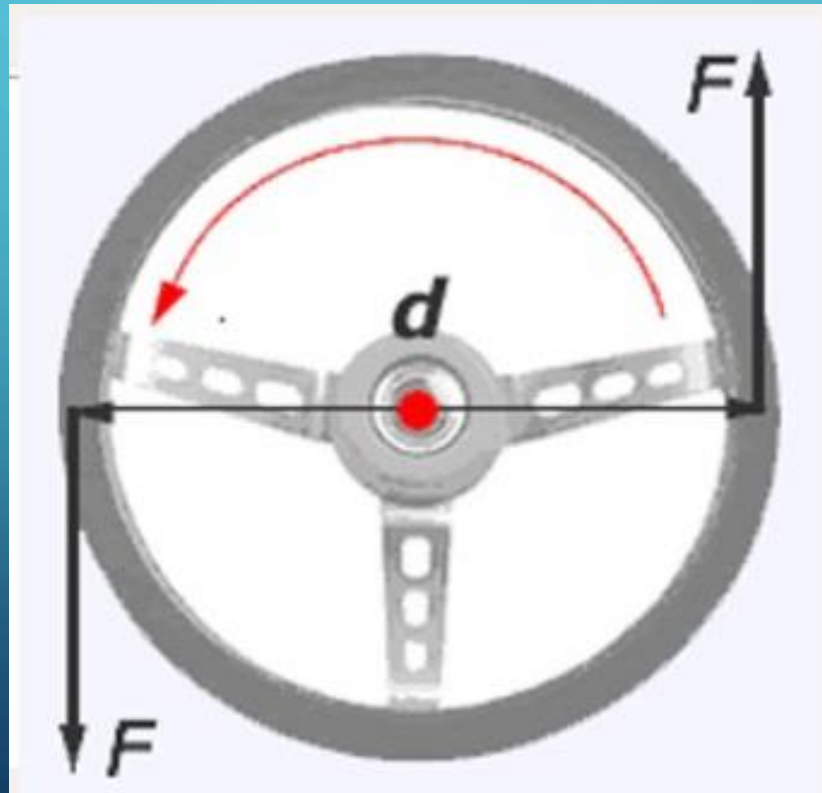
основни закон динамике

$$\vec{M} = I \vec{\alpha}$$

$$\vec{M} = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t}$$

## ➤ Момент спрега

- Специјални случај дејства момента две силе настаје када су оне једнаке по интензитету и правцу, а имају супротне смерове и различите нападне тачке (нападне линије). Овакве силе чине спрег сила.



## ПРИМЕРИ

5. За материјалну тачку масе  $m$  која се налази на растојању  $r$  од осе ротације, момент инерције је:

- a)  $I = mr^2$ ;
- б)  $I = mr$ ;
- в)  $I = m^2r^2$ .

7. Ако се једном од два једнака тела масе по  $1 \text{ kg}$ , која су повезана неистегљивим канапом пребаченим преко котура, дода претег од  $0,1 \text{ kg}$  у моменту када је систем у миру, систем добија убрзање;

- a)  $9,81 \text{ m/s}^2$  ;
- б)  $0,48 \text{ m/s}^2$  ;
- в)  $0.981 \text{ m/s}^2$  .

45. За материјалну тачку масе  $m$  која се брзином  $v$  креће по кружници полупречника  $r$  количник из момента импулса и импулса је:

а)  $m$ ;

б)  $v$ ;

ц)  $v/m$ ;

д)  $r$ ;

е)  $m \cdot r$ ;

ф)  $m \cdot r^2$ .



49. Ако човек почне да се креће по сплаву који се налази на води у стању мировања (трење између сплава и воде се занемарује), спав тада почиње да се креће:

- 
- а) у истом правцу и смеру у односу на кретање човека;
  - б) у истом правцу и супротном смеру у односу на кретање човека;
  - в) уопште се не креће.

2.16. Дечак масе 25 kg стоји на поду. Колика је тежина дечака?

$$m = 25 \text{ kg} , Q = ?$$

$$Q = mg = 25 \text{ kg} \times 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 245 \text{ N} .$$

2.17. Сила нормалне реакције подлоге на којој стоји девојчица износи 250 N. Колика је маса девојчице?

$$N = 250 \text{ N} , m = ?$$

$$m = \frac{Q}{g} = \frac{N}{g} \approx 25,5 \text{ kg} .$$

2.29. Тело масе 100 g, док клизи по хоризонталној подлози, притиска вертикално надоле сила од 0,3 N. Колика је сила трења ако је коефицијент трења клизања 0,2?

$$m = 0,1 \text{ kg}, F = 0,3 \text{ N}$$

$$F_{\text{тр}} = ?$$

Пошто се тело не креће по вертикали, то је

$$N = mg + F, \text{ па је сила трења:}$$

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \mu(mg + F) \approx 0,256 \text{ N}.$$

3.22. На пингпонг лоптицу потпуно потопљену у воду делује сила потиска 400 mN. Колика је запремина лоптице?

$$F_{\text{п}} = 400 \text{ mN} = 0,4 \text{ N}, V = ?$$

$$V = \frac{F_{\text{п}}}{\rho g} = \frac{0,4 \text{ N}}{1000 \text{ kg/m}^3 \times 9,81 \text{ m/s}^2} \approx 0,000 040 8 \text{ m}^3 = 40,8 \text{ cm}^3.$$

1.32. Сила интензитета 300 mN убрзава тело масе 200 g. Одредити убрзање тела.

$$F = 300 \text{ mN} = 0,3 \text{ N}$$

$$m = 200 \text{ g} = 0,2 \text{ kg}, a = ?$$

$$a = \frac{F}{m} = \frac{0,3 \text{ N}}{0,2 \text{ kg}} = \frac{0,3 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0,2 \text{ kg}} = 1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

3.7. Дечак вуче врата силом од 10 N која је нормална на раван врата. Удаљеност кваке од шарке је 75 cm. Коликим моментом силе дечак делује на врата?

$$F = 10 \text{ N}, d = 75 \text{ cm} = 0,75 \text{ m}, M = ?$$

$$M = Fd = 10 \text{ N} \times 0,75 \text{ m} = 7,5 \text{ N m}.$$

**Hvala na pažnji**

